ЛЕКЦИИ 3,4 КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

§1 Определение двойного интеграла.

Пусть D – некоторая замкнутая ограниченная область на плоскости и пусть в области D определена ограниченная функция z = f (x,y). Разобьём область D на n частей D_i (i = 1, 2,…n) так, чтобы любые две части не имели общих внутренних точек. В каждой части D_i возьмём произвольную точку Mi (ξi, ηi) и составим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi i, \eta i)\cdot \Delta\delta i, \qquad (1)$$

где $\Delta\delta i$ - площадь Di. Эта сумма называется интегральной суммой функции f (x,y), соответствующей данному разбиению области D на части и данному выбору промежуточных точек Mi. Пусть di – диаметр области Di *, а $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{d_i\}$.

Определение. Если при λ → 0 существует предел интегральных сумм (1), который не зависит ни от способа разбиения области D на части, ни от выбора точек Mi на этих частях, то этот предел называется двойным интегралом от функции f (x,y) по области D и обозначается символом

$$\iint\limits_D f(x,y)d\delta \quad \text{или} \quad \iint\limits_D f(x,y)dxdy \ ,$$

при этом функция f (x,y) называется интегрируемой в области D.
Замечание. Диаметром d(G) области G называется наибольшее из расстояний между граничными точками этой области.

Теорема 1.1. Функция, непрерывная в замкнутой ограниченной области $\overline{D}$, интегрируема в этой области.

Теорема 1.2. Функция, ограниченная в замкнутой области $\overline{D}$ и непрерывная в ней всюду, кроме точек конечного числа кусочно-гладких линий, интегрируема в этой области.

Двойные интегралы обладают такими же свойствами, что и определённые интегралы (линейность, аддитивность, формула среднего значения и т.д.)

§2. Вычисление двойного интеграла путём сведения к повторному.

Одним из эффективных способов вычисления двойного интеграла является сведение его к повторному однократному.

Пусть область D:

$$D = \{(x, y): a \le x \le b,\ \ y_1(x) \le y \le y_2(x)\},$$

где $y_1(x)$, $y_2(x)$ – непрерывные на отрезке [a;b] функции, такова, что любая прямая проходящая через внутренние точки области параллельно оси OY, пересекает границу этой области не более чем в двух точках (рис. I). Область такого вида мы будем называть стандартной относительно OY.

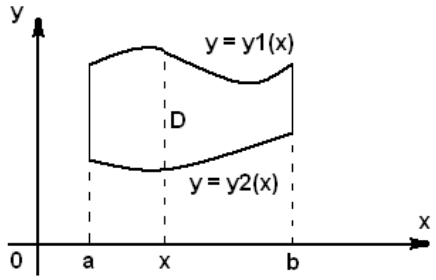


рис. I

Теорема 5.3. Если функция f (x,y) интегрируема в области D, то справедливо равенство

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \qquad (2)$$

Интеграл, стоящий в правой части равенства называется повторным.

Если область D имеет вид $D = \{(x, y): x_1(y) \le x \le x_2(y),\ \ c \le y \le d\}$, т.е. стандартна относительно оси OX (рис. 2), то в условиях теоремы 5.3 справедливо равенство

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \qquad (3)$$

Если область D более сложного вида, то её разбивают на части указанных видов и применяют свойство аддитивности двойного интеграла.

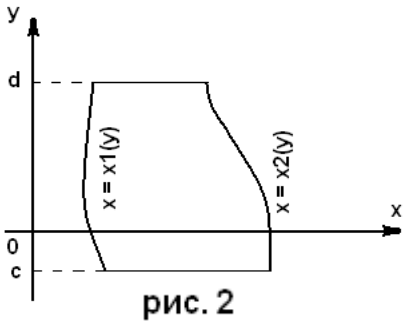


рис. 2

§3. Замена переменных в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярных координатах.

Рассмотрим двойной интеграл

$$\iint_D f(x,y)dxdy,$$

Предположим, что от переменных x и y мы переходим к переменным U и υ с помощью формул

$$x = x(U, \upsilon), \quad y = y(U, \upsilon), \qquad (3)$$

т.е. совершаем преобразование. Предположим далее, что U и υ однозначно определяется из (3):

$$U = U(x, y), \quad \upsilon = \upsilon(x, y). \qquad (4)$$

С помощью формул (3), (4) каждой точке M (x, y) области D ставится в соответствие точка M' (x, y) области G переменных U и υ и наоборот.

Если функции (4) имеют в области G непрерывные частные производные и если функциональный определитель (Якобиан преобразования):

$$J(U,\upsilon) = \frac{D(x,y)}{D(U,\upsilon)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial U} & \frac{\partial x}{\partial \upsilon} \\ \frac{\partial y}{\partial U} & \frac{\partial y}{\partial \upsilon} \end{pmatrix}$$

отличен от нуля в G, то справедливо равенство

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_G f(x(U,\upsilon), y(U,\upsilon))\left|J(U,\upsilon)\right| dyd\upsilon \qquad (5)$$

Формула (5) называется формулой замены переменных в двойном интеграле.

При решении конкретных задач наиболее часто приходится переходить от декартовых координат к полярным координатам. Они связаны с декартовыми координатами x, y соотношениями

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi \quad (\rho \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi) \qquad (6)$$

Вычисляя якобиан этого преобразования, получим $J(\rho,\varphi) = \rho$. Следовательно, по формуле (5), будем иметь

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_G f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho \cdot d\rho \cdot d\varphi \qquad (7)$$

§4. Некоторые приложения двойных интегралов.

1^0. Площадь плоской фигуры, ограниченной областью вычисляется по формуле

$$S = \iint_D dxdy.$$

2^0. Объём цилиндрического тела,

ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$, снизу плоскостью z = 0 и с боковых сторон цилиндрической поверхностью, у которой образующие параллельные оси OZ, а направляющей служит граница области D (рис. 3), вычисляется по формуле

$$\upsilon = \iint_D f(x, y)dxdy$$

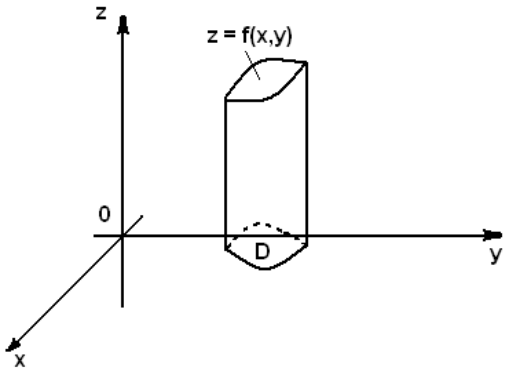


рис.3

3^0. Масса материальной пластинки с плоскостью $\rho = \rho(x, y)$, занимающей в плоскости Oxy некоторую область D, вычисляется по формуле

$$m = \iint_D \rho(x, y)dxdy.$$

4^0. Координаты центра масс пластинки, описанной в пункте 3^0, вычисляются по формулам

$$x_c = \frac{\iint_D x \cdot \rho(x, y)dxdy}{m}, \qquad y_c = \frac{\iint_D y \cdot \rho(x, y)dxdy}{m},$$

где $m = \iint_D \rho(x, y)dxdy$ - масса пластинки.

В частности, если пластинка однородна, т.е. $\rho(x, y) = const$, то формулы координат центра масс упрощаются и принимают вид

$$x_c = \frac{1}{S}\iint_D xdxdy, \qquad y_c = \frac{1}{S}\iint_D ydxdy,$$

где S – площадь пластинки.

§5. Определение тройного интеграла.

Основные понятия и теоремы для тройных интегралов аналогичны соответствующим понятиям и теоремам для двойных интегралов. Пусть T - замкнутая ограниченная область в пространстве OXYZ и пусть в области T определена ограниченная функция Y = f(M)=f(x,y,z). Разобьем область T на n частей $T_\iota (\iota = 1,2,3 \ldots \kappa)$ так, чтобы любые две части не имели общих внутренних точек, в каждой области T_ι возмем произвольную точку $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ и составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i \qquad (8)$$

где ΔV_i -объем T_i .Пусть d_i -диаметр T_i, $\lambda = \max \alpha$.

Определение. Если при $\lambda \to 0$ существует предел интегральных сумм (I), который не зависит от способа разбиения области на части и от выбора точек M_i на этих частях, то этот предел называется тройным интегралом от функции $f(x, y, z)$ по облати T и обозначается символом

$$\iiint_T f(x, y, z)dV \text{ или } \iiint_T f(x, y, z)dxdydz,$$

а функция $f(x, y, z)$, называется интегрируемой в области T .

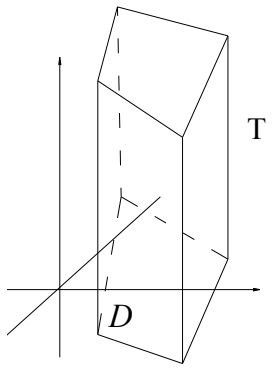
Теорема . Функция, непрерывная в ограниченной замкнутой области, интегрируема в этой области.

Тройные интегралы обладают такими же свойствами, как определенные и двойные интегралы (линейность, аддитивность, формула среднего значения и т.д.).

§6. Вычисление тройного интеграла с помощью повторного интегрирования.

Пусть функция $f(x,y,z)$` определена в области $\mathrm{T}=\{(x,y,z):(x,y)\in D, z,(x,y)\in z\in z_2(x,y)\}$, где $z_1(x,y)$ и $z_2(x,y)$ - непрерывные функции в ограниченной области D. (рис.9)

Теорема 6.1. Если функция $f(x,y,z)$ интегрируема в области T, то справедливо равенство



$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz=\iint\limits_D dxdy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \qquad (9)$$

Если область D стандартна относительно оси Oy и имеет вид $D=\{(x,y): a\le x\le b, y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$, то формулу (2) можно записать в виде

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \qquad (10)$$

В частности, если область T представляет собой прямоугольный параллелепипед $\mathrm{T}=\{(x,y,z): a\le x\le b, c\le y\le d, k\le z\le l\}$, то справедлива формула

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz=\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d dy\int\limits_k^l f(x,y,z)dz\,. \qquad (11)$$

§7. Замена переменных в тройном интеграле. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах.

Пусть требуется найти тройной интеграл $\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz$. Перейдем от переменных x,y,z к переменным u,v,w по формулам

$$x=x(u,v,w),\quad y=y(u,v,w)\quad z=z(u,v,w) \qquad (12)$$

Обозначим через τ` область пространства переменных u,v,w, которая при преобразовании (12) переходит в область T.

Предположим, что функции (12) имеют в области τ непрерывные частные производные первого порядка и вычислим якобиан преобразования:

$$J(u,v,w)=\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=\begin{vmatrix}\frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv} & \frac{dx}{dw}\\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{dv} & \frac{dy}{dw}\\ \frac{dz}{du} & \frac{dz}{dv} & \frac{dz}{dw}\end{vmatrix}$$

Теорема 7.1. Если преобразования (12) переводит область τ в T и являются взаимно однозначным и если функции (12) имеют в области τ непрерывные частные производные первого порядка и якобиан преобразования отличен от нуля, то справедлива следующая формула замены переменных в тройном интеграле:

$$\iiint\limits_{T} f(x.y.z)dxdydz = \iiint\limits_{\tau} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))|J(u,v,w)|dudvdw. \qquad (6)$$

В частности, при переходе от декартовых координат x, y, z в цилиндрические координаты ρ, φ, z (рис.10), связанным с x, y, z формулами:

$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z.$

$(0 \le \rho \le +\infty, 0 \le \varphi \le 2\pi, -\infty \le z \le +\infty).$

Якобиан преобразования будет равен $J = \rho \ge 0$.Следовательно формула (6) примет вид:

$$\iiint\limits_{T} f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{\tau} f(\rho\cos\varphi.\rho\sin\varphi, z)\rho d\rho d\varphi dz. \qquad (7)$$

При переходе от декартовых координат x, y, z к сферическим (рис.5): $x = \rho\cos\varphi \cdot \sin\theta, \quad y = \rho\sin\varphi \cdot \sin\theta, \quad z = \rho\cos\theta$

$(0 \le \rho \le +\infty, 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \theta \le \pi).$

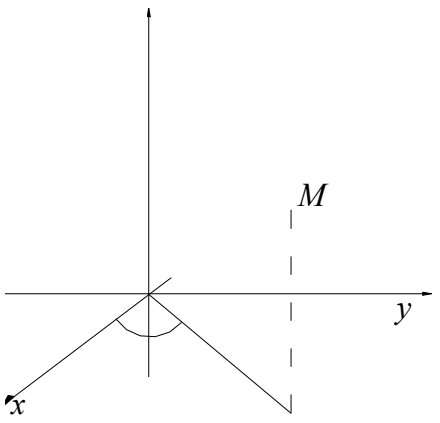


рис.4

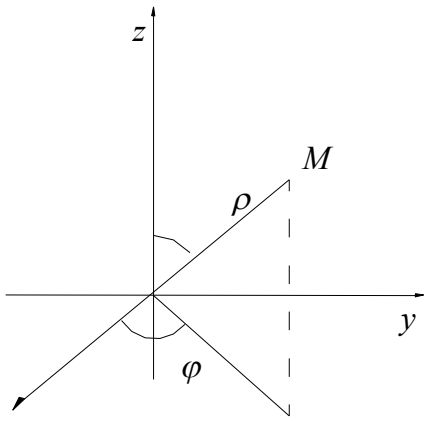


рис.5

Якобиан преобразования будет равен $J = \rho^2 \sin\theta > 0$.Следовательно,

$$\iiint\limits_{T} f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{\tau} f(\rho, \varphi, \theta)\rho^2 \sin\theta \cdot d\rho d\varphi d\theta \qquad (8)$$

§ 8. Некоторые применения тройных интегралов.

1. Объем v тела T выражается формулой:

$$V = \iiint\limits_{T} dxdydz.$$

2.Масса тела T с плотностью $\rho(x, y, z)$, представляющей собой непрерывную функцию, равна:

$$m = \iiint\limits_{T} \rho(x.y.z)dxdydz.$$

3, Координаты центра масс тела определяются следующими формулами:

$$x_i = \frac{\iiint\limits_{T} x\rho(x, y, z)d\vartheta}{m}, \quad y_i = \frac{\iiint\limits_{T} y \cdot \rho(x, y, z)d\vartheta}{m}, \quad z_i = \frac{\iiint\limits_{T} z \cdot \rho(x, y, z)d\vartheta}{m} \qquad (9)$$

где m – масса данного тела.

В частности, если рассматриваемое тело однородно, т.е. $\rho(x, y, z) = const$, то выражения для координат центра масс упрощаются и принимают вид

$$x_i = \frac{\iiint\limits_{T} x d\vartheta}{\vartheta}, \quad y_i = \frac{\iiint y d\vartheta}{\vartheta}, \quad z_i = \frac{\iiint\limits_{T} z d\vartheta}{\vartheta},$$

где ϑ -объем данного тела.

Пример 1. Вычислить интеграл:

$$J = \iiint\limits_{T} y dx dy dz,$$